КОММЕНТАРИЙ: В начале экзамена студентам выдаются задачи. Некоторые из сдающих экзамен могут быть освобождены от этого (по решению преподавателя, ведущего семинары в данной группе, с учетом работы в течение семестра).

Выдается 3 задачи. На решение отводится 30 мин. После этого в течение 15 мин. происходит проверка. Те, кто правильно решил не менее 2 задач, получают билет и начинают готовиться к ответу. Те, кто не смог решить 2 задачи, получают "неуд.".

Ниже приведены примеры задач, которые будут выдаваться в начале экзамена.

Замечание: во всех задачах, где координатами являются x, y или x, y, z, они упорядочены естественным образом, т. е. x — первая координата, y — вторая, z — третья.

1. Найти компоненты тензора $T^i_j = \begin{cases} 0, & i\neq j, \\ 2, & i=j \end{cases}$ после замены базиса с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. В базисе e_1, e_2 тензор T имеет следующие компоненты: $T^1_2 = 3$, $T^1_1 = T^2_1 = T^2_2 = 0$. Найти компоненту T^2_1 тензора T в базисе $(f_1, f_2) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Найти компоненту T^{22}_{11} тензора $T = e^1 \otimes e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e^2 \otimes e_1 \otimes e_1$ в базисе $f_1 = 3e_1,\ f_2 = e_2$.
4. Пусть T_{ijk} — кососимметрический тензор в пространстве $\mathbb{R}^3$, у которого компонента T_{123} равна 2 в базисе e_1, e_2, e_3. Вычислить его компоненты в базисе $f_1 = e_2,\ f_2 = -e_3,\ f_3 = e_1 + e_2$.
5. Вычислить компоненты тензора $T = \mathrm{Alt}(u \otimes v)$, где $u = 2e_1 + e_2$, $v = 2e_1$.
6. Вычислить компоненты тензора $T = \mathrm{Sym}(\xi \otimes \eta)$, где $\xi = -e^1$, $\eta = e^2 - e^1$.
7. Вычислить значение тензора $\xi \otimes \eta$, где $\xi = e^1 + e^2$, $\eta = e^1 - e^2$, на паре векторов $5e_1$ и $4e_2$.
8. Найти свертку тензора $2e_1 \otimes e^2 - 3e_2 \otimes e^2 + e_3 \otimes e^2 - e_3 \otimes e^3$.
9. Найти компоненты тензора $T = e_3 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_1 \otimes e_2$ после применения операции перестановки индексов, заданной перестановкой $(1, 2, 3) \to (2, 1, 3)$.
10. Поднять первый индекс у тензора $T = 2e^1 \otimes e^2 + 3e^2 \otimes e^1$ с помощью скалярного произведения, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
11. Вычислить внешнее произведение форм $dx + 2dy$ и $x^2 dy \wedge dz + dz \wedge dx$.
12. Вычислить внешний дифференциал формы $\omega = x^2\, dx + xy^3\, dy$.
13. Найти значения параметра λ, для которых форма $3\lambda\, xdy \wedge dz + y\, dx \wedge dz$ будет замкнутой.
14. Найти прообраз формы $\omega = y^2\, dx \wedge dy$ при отображении $(x, y) \mapsto (x^3, y^2)$ плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ в себя.
15. Найти прообраз формы $\omega = \dfrac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}$ при отображении окружности в плоскость $\varphi \mapsto (x, y)$, заданном формулами $x = 2\cos\varphi$ и $y = 2\sin\varphi$.
16. Вычислить интеграл от 1-формы $dx + dy$ по нижней половине эллипса $x^2 + 2y^2 = 1$.
17. Вычислить коммутатор векторных полей $X = (y, 0)$ и $Y = (x^2 + y, x - y)$ на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$.
18. Вычислить коммутатор векторных полей $X = (0, 0, 1)$ и $Y = (x - 3y, -y^3, z)$ в пространстве $\mathbb{R}^3(x, y, z)$.
19. Найти ковариантную производную функции $f = yx^2 + y^2$ относительно римановой связности для метрики $ds^2 = dx^2 + y^2\, dy^2$.
20. Найти ковариантную производную векторного поля $v = (x^2, y)$ относительно римановой связности для метрики $ds^2 = 2dx^2 + 3dy^2$.
21. Вычислить символ Кристоффеля Γ^1_{22} для метрики $ds^2 = x^2(dx^2 + dy^2)$.
22. Для евклидовой метрики $dx^2 + dy^2$ вычислить символ Кристоффеля Γ^2_{11} в координатах $u = y$, $v = xy$.
23. На плоскости с координатами (x, y) задана аффинная связность с символами Кристоффеля $\Gamma^1_{11} = y$, $\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 1$ (остальные символы Кристоффеля равны нулю). Выписать уравнения параллельного переноса вдоль прямой $y = 3$.
24. На плоскости с координатами (x, y) задана аффинная связность с символами Кристоффеля $\Gamma^2_{11} = 2$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = y$ (остальные символы Кристоффеля равны нулю). Выписать уравнения геодезических.